# Equações Diferenciais Lineares

Vamos discutir aqui como solucionar equações diferenciais lineares a coeficientes constantes que aparecem frequentemente em problemas físicos.

## 1 Solução Geral da Homogênea:

Todo polinômio de grau $n$, $P(z)$, sempre admite $n$ raízes $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ e pode assim ser fatorizado como:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - p_1)(z - p_2)...(z - p_n)\,. \quad (1)$$

Esse resultado pode ser aplicado imediatamente à resolução das equações diferenciais lineares

$$a_0 f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} f'(t) + a_n f(t) = 0\,, \quad (2)$$

onde usamos a notação

$$f^{(p)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^p f(t)\,,$$

logo podemos re-escrever a Eq. (2) como

$$a_0 (\frac{d}{dt} - p_1)(\frac{d}{dt} - p_2)...(\frac{d}{dt} - p_n) f(t) = 0\,.$$

Como as $n$ operações $(\frac{d}{dt} - p_j) \quad (j = 1, .., n)$ comutam entre si, é claro que as exponenciais $e^{p_1 t}, ..., e^{p_n t}$ são as soluções particulares da equação diferencial (Eq.(2)). Se todas as raizes $p_j$ são diferentes, as $n$ funções exponenciais são independentes e a solução geral, que depende a priori linearmente de $n$ constantes arbitrárias $A_1$ é:

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + ... + A_n e^{p_n t}\,. \quad (3)$$

Por outro lado, se uma raiz, por exemplo, $p_1$, aparece $k$ vezes, faltam $k - 1$ soluções. No entanto, como

$$(\frac{d}{dt} - p_1)e^{p_1 t}g(t) = e^{p_1 t}g'(t) \rightarrow (\frac{d}{dt} - p_1)^k e^{p_1 t}g(t) = e^{p_1 t}g^{(k)}(t)$$

vemos que para uma raiz $p_1$ de ordem $k$ estão associadas $k$ soluções independentes $e^{p_1 t}, te^{p_1 t}, t^2 e^{p_1 t}, ..., t^{k-1}e^{p_1 t}$.

# 2 Um Exemplo de Segunda Ordem

Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

onde $a, b, c$ são números reais. Procuramos soluções do tipo $f(x) = e^{px}$, logo a equação acima transforma-se em uma equação algébrica para o polinômio característico

$$a\,p^2 + b\,p + c = 0$$

cujas raizes são

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}\,.$$

Há três casos possíveis, vejamos o que acontece em cada um desses casos.

**Caso 1:** $b^2 - 4ac > 0$, nesse caso $p_1$ e $p_2$ são reais e a solução geral será

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\,.$$

**Caso 2:** $b^2 - 4ac < 0$, nesse caso $p_1 = p_2^* = -\gamma + i\omega$ são números complexos, claramente aqui $\gamma = b/(2a)$ e $\omega = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$. A solução geral nesse caso fica

$$f(t) = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})\,.$$

**Caso 2:** $b^2 - 4ac = 0$, nesse caso $p_1 = p_2 = -\gamma$ é uma raiz dupla et a solução fica

$$f(t) = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2\,t)\,.$$

## 3 Solução Geral da Equação Inomogênea:

Consideremos agora o caso da equação diferencial inomogênea

$$a_0 f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} f'(t) + a_n f(t) = g(t)\,, \tag{4}$$

a solução geral dessa equação é a solução geral da equação homogênea, que vimos acima, mais uma solução particular da equação inomogênea.

## 4 Números Complexos

Vamos lembrar algumas propriedades fundamentais dos números complexos que podemos introduzir com base em sua representação geométrica no plano de Argand-Gauss. Considere o ponto $P$ cujo vetor de posição com relação à origem O é

$$\overrightarrow{OP} = a\,\hat{\mathbf{x}} + b\,\hat{\mathbf{y}}\,, \tag{5}$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{x}}$ são os versores unitários com relação aos eixos $Ox$ e $Oy$, respectivamente.

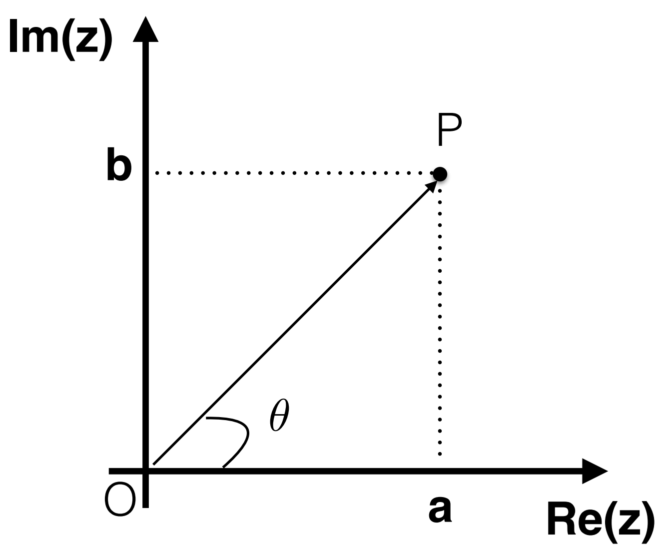


Figura 1: Plano de Argand-Gauss.

Podemos associar a $\overrightarrow{OP}$ um número complexo $z$ relacionado com Eq. (5) por

$$z = a + i\,b\,, \tag{6}$$

onde $a \equiv \mathrm{Re}(z)$ e $b \equiv \mathrm{Im}(z)$, segundo o plano de Argand-Gauss dado pela Fig. 4. O complexo conjugado de $z$, $z^*$, é o número

$$z^* = a - i\,b\,, \tag{7}$$

de forma que o módulo de $z$, $|z|$, pode ser obtido por

$$|z|^2 = z\,z^* = (a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2\,. \tag{8}$$

É fácil mostrar também que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2\,i}\,. \tag{9}$$

Com o auxílio da famosa fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x\,, \tag{10}$$

podemos escrever

$$z = a + i\,b = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta} \tag{11}$$

onde usamos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\,\cos\theta$ e $b = r\,\sin\theta$, como pode ser visto na Fig. 4. Além disso

$$e^z = e^{a+i\,b} = e^a(\cos b + i\sin b)\,.$$

Por essa razão se tivermos dois números complexos $z_1 = r_1\,e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2\,e^{i\theta_2}$ então:

1. $z_1\,z_2 = r_1\,r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $z_1/z_2 = (r_1/r_2)\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
3. $\mathrm{Re}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1\,\mathrm{Re}(z_1) + \lambda_2\,\mathrm{Re}(z_2)$, onde $\lambda_{1,2}$ são números reais.
4. $z_1 + z_2 = r_1\,e^{i\theta_1} + r_2\,e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1}(r_1 + r_2\,e^{i(\theta_2-\theta_1)}) = e^{i\theta_1}\,R\,e^{i\Theta}$ onde

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\,,$$

e

$$\sin\Theta = (r_2/R)\sin(\theta_2 - \theta_1)\,.$$

# 5 Oscilador Harmônico Amortecido

A equação de movimento para o oscilador harmônico unidimensional amortecido é dada por

$$mx'' = -kx - \rho x' \,, \quad \rho > 0 \tag{12}$$

onde $-\rho x'$ representa a resistência dissipativa que atua no sentido contrário à velocidade. Costuma-se dividir ambos os lados da Eq. (12) por $m$ obtendo assim

$$x'' + \omega_0^2 x + \gamma x' = 0 \tag{13}$$

onde definimos $\omega_0^2 = k/m$ e $\gamma = \rho/m$. Note que se tomarmos $\gamma = 0$ recuperamos a equação do oscilador harmônico simples.

Procurando soluções do tipo $z(t) = e^{pt}$ para essa equação, e logo com $z'(t) = p\, z(t)$, $z''(t) = p^2\, z(t)$ somos levados ao polinômio característico

$$p^2 + \gamma\, p + \omega_0^2 = 0$$

que já encontramos antes, e cujas raízes são

$$p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

que como vimos pode ter três tipos de soluções distintas.

## 5.1 Amortecimento subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$)

Nesse caso como já vimos $p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$ onde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ de forma que a solução geral é

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[a\, e^{i\,\omega\, t} + b\, e^{-i\,\omega\, t}\right] = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i(\omega t + \phi)}\,,$$

onde $a, b, A, \phi$ são constantes reais. Como queremos uma solução real, $x(t)$ é a parte real de $z(t)$, isto é

$$x(t) = A\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, \cos(\omega t + \phi)\,.$$

Essa solução representa uma oscilação amortecida, veja como a amplitude de oscilação está diminuindo com o passar do tempo.

## 5.2 Amortecimento supercrítico ($\gamma/2 > \omega_0$)

Nesse caso $p_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$ onde $\beta = \sqrt{\frac{\gamma}{4} - \omega_0^2}$ e a solução geral agora é

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,[a\,e^{\beta\,t} + b\,e^{-\beta\,t}]$$

que é sempre a soma de duas exponenciais decrescentes, uma caindo mais rápido do que a outra. O movimento não é mais periódico.

## 5.3 Amortecimento crítico ($\gamma/2 = \omega_0$)

Nesse caso a solução geral é

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,[a + b\,t]$$

com $\omega_0 = \gamma/2$. A solução decai rapidamente, logo esse amortecimento faz o sistema retornar ao equilíbrio mais rapidamente.

## 5.4 Oscilações Forçadas e Ressonância

Consideramos até agora oscilações livres, nesse caso o período de oscilação é determinado pela própria natureza do oscilador, por sua inércia e pelas forças restauradoras que atuam sobre ele. A oscilação pode ser amortecida pelas forças dissipativas atuando sobre ele.

Vamos ver agora o que acontece se tivermos atuando sobre o oscilador uma força externa periódica. O período dessa força não coincide, em geral, com o período do oscilador. Inicialmente vejamos o caso do oscilador não amortecido, a equação diferencial que precisamos resolver é

$$x'' + \omega_0^2 x = F(t) = \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega t)\,. \tag{14}$$

esta é uma equação diferencial de segunda ordem linear inomogênea. A solução geral da equação homogênea corresponde às oscilações livres, na presença de discipação (que sempre ocorre na prática) as oscilações livres são amortecidas, ou seja, tendem a zero para $t \to \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que o tempo de decaimento típico do sistema. Essas são assim chamadas de soluções transientes ou transitórias. Por outro lado, a força externa continua suprindo energia produzindo oscilações forçadas que continuam existindo para tempos muito longos. Essas soluções particulares da equação homogênea sá chamadas de soluções estacionárias.

Para obter essa solução vamos usar a notação complexa,

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

de forma que

$$z'' + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

e procuramos uma solução

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

de forma que $z' = i\omega z$ e $z'' = -\omega^2 z$ levando à equação

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

e assim

$$z(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} = A\, e^{i\varphi}\, e^{i\omega t}$$

com

$$A = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

e podemos tomar $\varphi = 0$ $(\omega < \omega_0)$, $\quad \varphi = -\pi$ $(\omega > \omega_0)$.

O que leva à solução particular (estacionária)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\,,$$

que correspondem à soluções com mesma freqüência que a força externa, amplitude $A$ e defasagem $\varphi$. O mesmo procedimento pode ser utilizado para o caso de oscilações forçadas amortecidas.