

# Lei de Gauss

**Lei de Gauss:** A lei de Gauss nos diz que o fluxo total do campo elétrico através de uma superfície fechada  $A$  é proporcional à carga elétrica contida no interior do volume delimitado por essa superfície. Matematicamente isso equivale a

$$\Phi = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

onde  $q_{\text{int}}$  é a carga interna à superfície. Uma forma de explicar porque a lei de Gauss funciona é dizer que o fluxo depende do número de linhas de campo que deixa a carga e isso é independente da forma da superfície imaginária de Gauss que escolhermos para circundar a carga.

Para provar a lei de Gauss, introduzimos o conceito de ângulo sólido. Considere o elemento de área orientado  $\Delta\mathbf{A}_1 = \Delta A_1 \hat{\mathbf{r}}$  sobre a superfície de uma esfera  $S_1$  de raio  $r_1$ , como mostrado na figura 1.

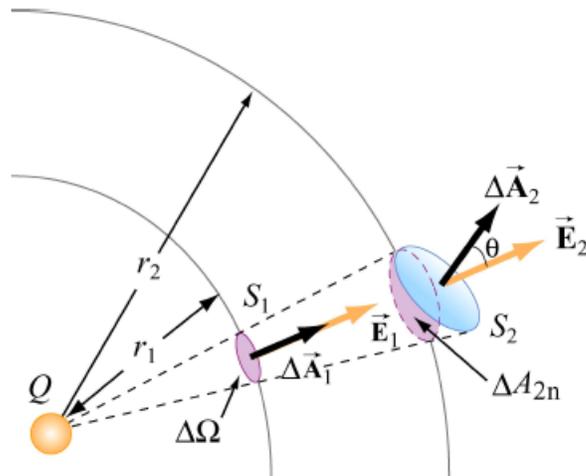


Figura 1: Elementos de área  $\Delta\mathbf{A}_1$  e ângulo sólido  $\Delta\Omega$

O ângulo sólido  $\Delta\Omega$  subtendido por  $\Delta\mathbf{A}_1 = \Delta A_1 \hat{\mathbf{r}}$  e o centro da esfera é definido por

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A_1}{r_1^2}. \quad (2)$$

Ângulos sólidos são quantidades adimensionais medidas em estero-radianos. Como a área da esfera  $S_1$  é  $4\pi r_1^2$ , o ângulo sólido total subtendido pela esfera é

$$\Omega \equiv \frac{4\pi r_1^2}{r_1^2} = 4\pi. \quad (3)$$

O conceito de ângulo sólido em três dimensões é análogo ao de ângulo em duas dimensões

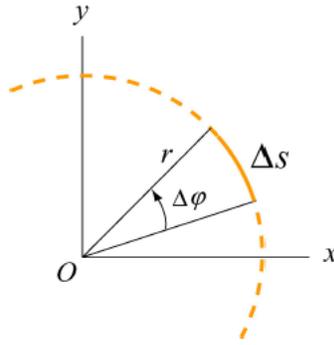


Figura 2: O arco  $\Delta S$  e o ângulo  $\Delta\varphi$

Como ilustrado na Fig. 2, um ângulo  $\Delta\varphi$  é a razão entre o comprimento de arco e o raio  $r$  do círculo

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{r}. \quad (4)$$

Como o comprimento total do arco é  $S = 2\pi r$ , o ângulo total subtendido pelo círculo é

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi. \quad (5)$$

Na Fig. 1, o elemento de área  $\Delta\mathbf{A}_2$  faz um ângulo  $\theta$  com o vetor radial  $\hat{\mathbf{r}}$ , logo o ângulo sólido subtendido por  $\Delta A_2$  é

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r_2^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2}, \quad (6)$$

onde  $\Delta A_2 \cos\theta$  é a área da projeção de  $\Delta A_2$  sobre uma esfera  $S_2$  de raio  $r_2$ , concêntrica a  $S_1$ . O ângulo sólido subtendido por essa área é o mesmo que para  $\Delta A_1$ :

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathbf{A}_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2}. \quad (7)$$

Agora suponha que uma carga puntiforme  $Q$  seja colocada no centro das esferas concêntricas. Como vimos, pela lei de Coulomb, a razão das intensidades dos campos  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  no centro dos elementos de área  $\Delta\mathbf{A}_1$  e  $\Delta\mathbf{A}_2$  obedecem

$$E_i = k \frac{Q}{r_i^2} \implies \frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (8)$$

O fluxo elétrico através de  $\Delta A_1$  sobre  $S_1$  é

$$\Delta\Phi_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{A}_1 = E_1 \Delta A_1.$$

Por outro lado, o fluxo elétrico através de  $\Delta\mathbf{A}_2$  em  $S_2$  é (usando Eqs. (8) e (7))

$$\Delta\Phi_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{A}_2 = E_2 \Delta A_2 \cos\theta = E_1 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) A_1 = E_1 \Delta A_1.$$

Vemos assim que o fluxo elétrico através qualquer elemento de área subentendendo o mesmo ângulo sólido é constante, independente da forma ou orientação da superfície.

## 0.1 Exemplo de Aplicação

Vamos dar um exemplo que demonstra como aplicar a lei de Gauss, em problemas de alta simetria, para calcular o campo elétrico em todos espaço.

Considere uma placa infinita não condutora uniformemente carregada com densidade superficial de carga (constante)  $\sigma$ . Determine o campo elétrico em todo o espaço.

Para resolver o problema vamos prosseguir da seguinte forma: (1) identificar a(s) simetria(s) associada(s) com a distribuição de carga; (2) determinar a direção do campo elétrico e a superfície de Gauss sobre a qual a magnitude do campo elétrico é constante sobre porções da superfície; (3) dividir o espaço em regiões diferentes associadas com a distribuição de carga. Para cada região calcular  $q_{\text{int}}$ , a carga circundada pela superfície de Gauss; (4) calcular o fluxo  $\Phi$  através da superfície de Gauss para cada região; (5) equacionar  $\Phi$  com  $q_{\text{int}}/\epsilon_0$  e deduzir a magnitude do campo elétrico; (6) não esquecer que o campo elétrico é uma grandeza vetorial: expressar o resultado final em termos de um vetor, com módulo, sentido e direção.

Considerando que a placa encontra-se no plano  $x - y$ , o sistema é simétrico por translação nesse plano. Como a carga é uniformemente distribuída sobre a superfície, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  deve apontar na direção perpendicular ao plano, e sendo a carga positiva, para fora do plano, como mostra a Fig. 4,  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{k}}$ . A magnitude do campo elétrico é constante em planos paralelos ao plano não-condutor.

Escolhemos a superfície de Gauss como um cilindro com: duas tampas  $S_1$  e  $S_2$  e uma superfície lateral  $S_3$ . Como a distribuição de carga é uniforme, a carga interna à superfície de Gauss é  $q_{\text{int}} = \sigma A$ , onde  $A = A_1 = A_2$  é a área das tampas.

O fluxo total através da superfície de Gauss é

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{A}_3 = E_1 A_1 + E_2 A_2 + 0 = (E_1 + E_2)A$$

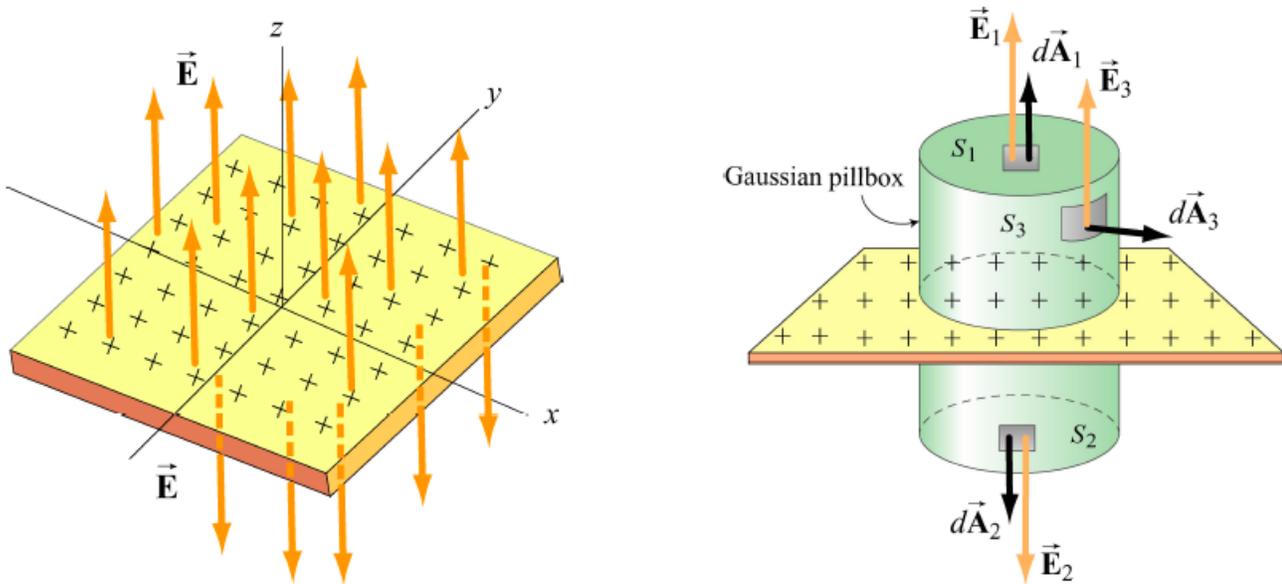


Figura 3: Campo elétrico de um plano infinito uniformemente carregado.

Como as duas tampas estão à mesma distância do plano, por simetria, a magnitude do campo elétrico deve ser a mesma:  $E_1 = E_2 = E$ . Logo o fluxo pode ser escrito como

$$\Phi = 2EA.$$

Aplicando a lei de Gauss obtemos

$$\Phi = 2EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Assim

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} & z < 0 \end{cases}$$

Vemos que o campo de um plano infinitamente grande não condutor é uniforme no espaço e contém uma discontinuidade em  $z = 0$  (Fig. ??):

$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

na realidade há uma transição contínua entre o valor do campo de um lado e de outro lado do plano. A discontinuidade aparece aqui pois consideramos um plano de espessura zero o que não pode ocorrer no mundo real.

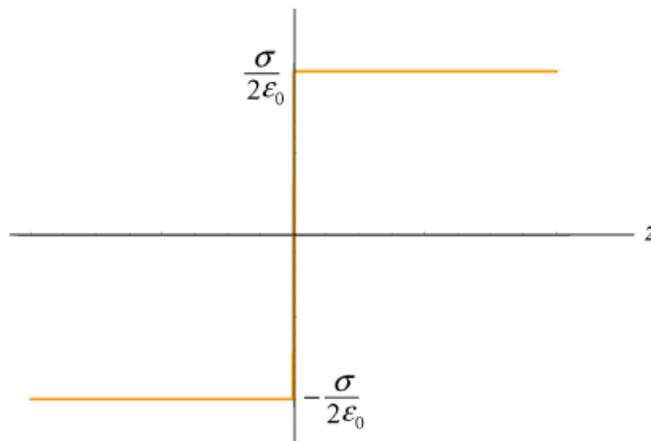


Figura 4: Campo elétrico de um plano infinito não condutor.

## 0.2 Campo em um Condutor

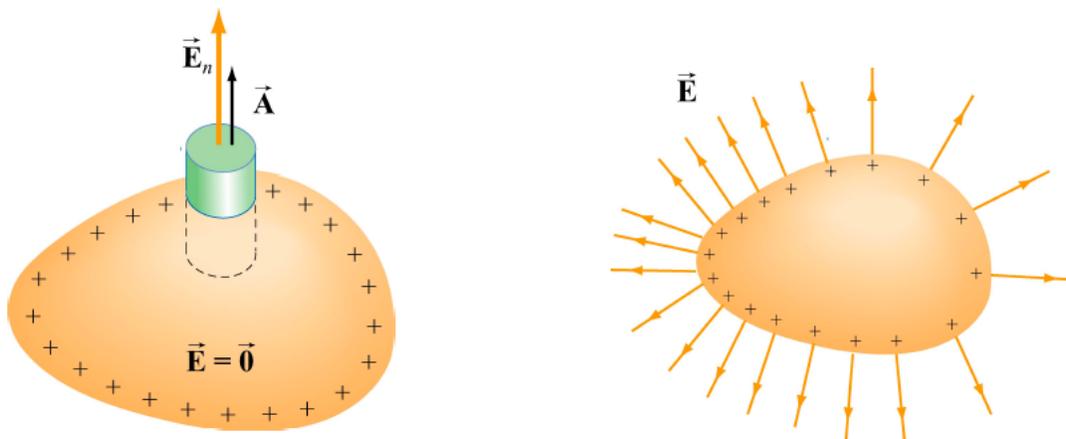


Figura 5: Campo elétrico imediatamente fora de um condutor.

Nos materiais isolantes, como o papel ou o vidro, os elétrons estão ligados a átomos particulares e não podem mover-se livremente. Por outro lado, dentro de condutores os elétrons estão livres para se movimentar.

As propriedades básicas de um condutor em equilíbrio eletrostático são: (1) o campo elétrico é nulo no interior do condutor; (2) qualquer carga deve ficar na superfície do condutor; (3) a componente tangencial de  $\mathbf{E}$  é nula na superfície do condutor; (4)  $\mathbf{E}$  é normal à superfície do condutor na região imediatamente fora do condutor.

Usando a lei de Gauss

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_n A + 0 \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (9)$$

logo

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Note que esse resultado não depende da forma do condutor. Esse resultado pode parecer incompatível com o resultado do plano infinito, mas não o é. Por que? Considere uma placa infinita condutora para entender o que está acontecendo aqui!