1 Série de Taylor:

Podemos expandir uma função $f(x)$, infinitamente diferenciável, em torno de um ponto a usando a série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\bigg|_{x=a}$$

Exemplos:

1)Podemos expandir a função $f(x) = (x+1)^n$ em torno de $a = 0$:

$$(x+1)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^3 + ...$$

2)Podemos expandir a função $f(x) = \ln(x)$ em torno de $a = x_0$

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{x_0^2}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + ...$$

3)Podemos expandir a função e^x em torno de $a = 0$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2 Coordenadas Cartesianas:

Um vetor $\vec{F}$ pode ser expresso em coordenadas cartesianas em função dos versores de base $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ e $\vec{e_z}$ como

$$\vec{F} = F_x\,\vec{e_x} + F_y\,\vec{e_y} + F_z\,\vec{e_z}$$

onde $\vec{e}_{x_i} \cdot \vec{e}_{x_j} = \delta_{ij}$ onde $x_i, x_j = x, y, z$. Claramente nesse caso os versores são constantes, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_{x_j} \equiv \partial_{x_i}\vec{e}_{x_j} = 0$$

Um elemento de volume nesse caso se escreve como $dV \equiv dx\,dy\,dz$.
Nesse caso os operadores diferenciais podem ser escritos como:

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} G(x,y,z) = \frac{\partial G}{\partial x}\,\vec{e_x} + \frac{\partial G}{\partial y}\,\vec{e_y} + \frac{\partial G}{\partial z}\,\vec{e_z}$$

Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\vec{\nabla}^2\, G(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G(x,y,z)) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

3 Coordenadas Cilíndricas:

Um vetor $\vec{F}$ pode ser expresso em coordenadas cilíndicas em função dos versores de base $\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\phi}$ e $\vec{e_z}$ como

$$\vec{F} = F_\rho\,\vec{e_\rho} + F_\phi\,\vec{e_\phi} + F_z\,\vec{e_z}$$

onde $\vec{e}_{x_i} \cdot \vec{e}_{x_j} = \delta_{ij}$ onde $x_i, x_j = \rho, \phi, z$.

Um ponto P localizado pelas coordenadas cartesianas $P = (x, y, z)$ pode ser escrito em coordenadas cilíndicas se observarmos que

$$x = \rho \cos\phi \qquad y = \rho \sin\phi \qquad z = z$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Claramente nesse caso os versores, exceto por e_z, não são constantes, pois

$$\vec{e}_\rho = \cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y$$

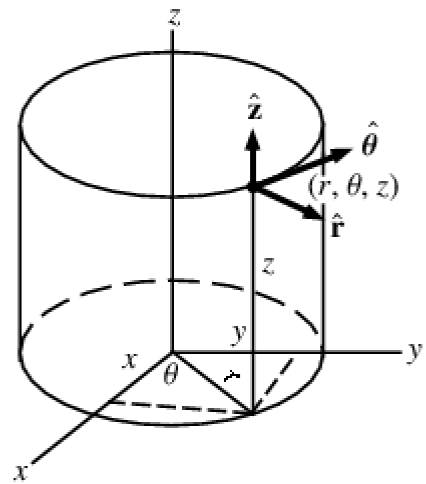

Figura 1: Disposição das coordenadas cilíndicas. Aqui $\vec{e}_\rho \equiv \hat{r}$, $\vec{e}_\phi \equiv \hat{\theta}$ e $\vec{e}_z \equiv \hat{z}$. Note que $0 \leq \theta(=\phi) < 2\pi$, $r(=\rho) \geq 0$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\rho = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y = \vec{e}_\phi \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\vec{e}_\phi = -\cos\phi\,\vec{e}_x - \sin\phi\,\vec{e}_y = -\vec{e}_\rho$$

Um elemento de volume nesse caso se escreve como $dV \equiv \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$.
Nesse caso os operadores diferenciais podem ser escritos como:

Divergente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\,F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla}G(\rho,\phi,z) = \frac{\partial G}{\partial\rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial G}{\partial\phi}\,\vec{e_\phi} + \frac{\partial G}{\partial z}\,\vec{e_z}$$

Rotacional:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right]\vec{e_\rho} + \left[\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right]\vec{e_\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right]\vec{e_z}$$

Laplaciano:

$$\vec{\nabla}^2\, G(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

4 Coordenadas Esféricas:

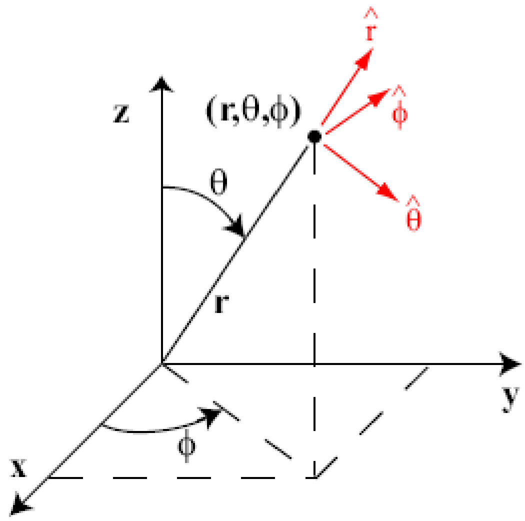

Figura 2: Disposição das coordenadas esféricas. Aqui $\vec{e_r} \equiv \hat{r}$, $\vec{e_\theta} \equiv \hat{\theta}$ e $\vec{e_\phi} \equiv \hat{\phi}$. Note que $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ e $r \geq 0$.

Um vetor $\vec{F}$ pode ser expresso em coordenadas esféricas em função dos versores de base $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ e $\vec{e_\phi}$ como

$$\vec{F} = F_r\,\vec{e_r} + F_\theta\,\vec{e_\theta} + F_\phi\,\vec{e_\phi}$$

onde $\vec{e}_{x_i} \cdot \vec{e}_{x_j} = \delta_{ij}$ onde $x_i, x_j = r, \theta, \phi$.

Um ponto P localizado pelas coordenadas cartesianas $P = (x, y, z)$ pode ser escrito em coordenadas esféricas se observarmos que

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Claramente nesse caso os versores não são constantes, pois

$$\vec{e_r} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$$

logo, por exemplo

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_r = -\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\theta = -\cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_y = \cos\theta\,\vec{e}_\phi$$

Um elemento de volume nesse caso se escreve como $dV \equiv r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. Nesse caso os operadores diferenciais podem ser escritos como:

Divergente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla}G(r,\theta,\phi) = \frac{\partial G}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial G}{\partial\phi}\,\vec{e_\phi}$$

Rotacional:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi})\right]\vec{e_r} \\
&+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r})\right]\vec{e_\theta} \\
&+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta})\right]\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

Laplaciano:

$$\vec{\nabla}^2\,G(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2}$$

Elemento de Linha Orientado:

Note que o elemento de linha orientado

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

pode ser escrito em coordenadas esféricas usando o fato que

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$

e logo

$$dx = \sin\theta\,\cos\phi\,dr + r\,\cos\theta\,\cos\phi\,d\theta - r\,\sin\theta\,\sin\phi\,d\phi$$

$$dy = \sin\theta\,\sin\phi\,dr + r\,\cos\theta\,\sin\phi\,d\theta + r\,\sin\theta\,\cos\phi\,d\phi$$

$$dz = \cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta$$

$$\begin{aligned}
d\vec{\ell} &= dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z \\
&= [\sin\theta\,\cos\phi\,dr + r\,\cos\theta\,\cos\phi\,d\theta - r\,\sin\theta\,\sin\phi\,d\phi]\,\vec{e}_x \\
&+ [\sin\theta\,\sin\phi\,dr + r\,\cos\theta\,\sin\phi\,d\theta + r\,\sin\theta\,\cos\phi\,d\phi]\,\vec{e}_y \\
&+ [\cos\theta\,dr - r\,\sin\theta\,d\theta]\,\vec{e}_z \\
&= [\sin\theta\,\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z]\,dr \\
&+ [\cos\theta\,\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z]\,r\,d\theta \\
&+ [-\sin\theta\,\sin\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\cos\phi\,\vec{e}_y]\,r\,\sin\theta\,d\phi \\
&= dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,d\phi\,\vec{e}_\phi
\end{aligned} \tag{1}$$

assim

$$d\vec{\ell}\cdot\vec{e}_r = dr$$

5 Coordenadas Curvilíneas: Forma Geral

Em um sistema de referência tridimensional genérico, considere as superfícies $q_1(x, y, z) =$ const. $=$ q$_1$, $q_2(x, y, z) =$ const. $=$ q$_2$ e $q_3(x, y, z) =$ const. $=$ q$_3$. Qualquer ponto do plano $P = P(x, y, z) \equiv P(q_1, q_2, q_3)$. Podemos assim escrever as coordenadas cartesianas do ponto P em função do outro sistema de coordenadas, isto é, $x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3)$ e $z = z(q_1, q_2, q_3)$. Essas são funções diferenciáveis.

Usando o fato que

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i \Longrightarrow (dx)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_i \, dq_j$$

podemos calcular a distância infinitesimal $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ como

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i \, dq_j \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} h_{ij}^2 \, dq_i \, dq_j$$

Se as superfícies forem ortogonais $h_{ij}(q_1, q_2, q_3) = 0$ para $i \neq j$, só $h_{ii} = h_i$ (fatores de escala) são não nulos. Assim

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \, (dq_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (ds_i)^2$$

com

$$h_i \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

Um versor de q_i é dado por

$$\vec{e}_{q_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}|}$$

com $\vec{r} = x \, \vec{e}_x + y \, \vec{e}_y + z \, \vec{e}_z$ logo

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{e}_z$$

e

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} = h_i.$$

Para as coordenadas cartesianas regulares os fatores de escala $h_i = 1$.

Assim os operadores diferenciais gradiente e divergente, por exemplo, nas coordenadas q_i (Mostre!) podem ser escritos como:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\vec{e}_{q_i}$$

e

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (F_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (F_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right),$$

respectivamente. Encontre as expressões para o Rotacional e Laplaciano!

Exemplo: Vamos usar o formalismo geral para deduzir as expressões que usamos em coordenadas esféricas

$$q_1 = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad q_2 = \theta = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad q_3 = \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ou ainda

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Podemos calcular

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\sin\theta\cos\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta)^2} = r$$

e

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} = \sqrt{(r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\cos\phi)^2} = r\ \sin\theta$$

assim $V = dx\,dy\,dz = ds_1\,ds_2\,ds_3 = dr\,r\ d\theta\,r\sin\theta d\phi = r^2\sin\theta dr\,d\theta\,d\phi$! Os versores desse sistema de coordenada são:

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(r\cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z) = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin\theta}(-r\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_y) = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y$$