1 Tensores Cartesianos:

Um vetor $\vec{A}$ de R_3 pode ser escrito em termos dos versores cartesianos $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$ e $\vec{e}_3 = \vec{k}$ como

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i,$$

em particular,

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i,$$

onde $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Podemos representar uma tranformação geral das componentes de $\vec{r}$ como

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j.$$

Definimos uma transformação **ortogonal** quando

$$a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\,.$$

Assim podemos transformar as componentes de $\vec{A}$ como

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_j\,,$$

dizemos que $\vec{A}$ é um tensor de ordem-1 com repeito à transformação A. Caso a transformacão seja ortogonal

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^{3} (a_{ji})^T a_{ik} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} (a_{ki})^T = \delta_{jk}\,.$$

Vemos que a_{ij} são componentes de uma matrix A tal que $A^T A = AA^T = I$, dizemos que a matriz A é ortogonal. O determinante de A é tal que $\det A = \det A^T$ logo $\det(AA^T) = (\det A)(\det A^T) = (\det A)^2 = \det I = 1 \rightarrow \det A = \pm 1$.

Rotações: Rotações são transformações ortogonais promovidas por A com $\det A = +1$

Inversão Espacial (Paridade) e Reflexão: Inversões espaciais e reflexões são transformações ortogonais promovidas por A com $\det A = -1$.

Inversão espacial: $x'_i = -x_i$ logo $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ii} = -1$. Uma reflexão poder obtida, por exemplo, para $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = x_2$ e $x'_3 = x_3$ com $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{11} = -1$ e $a_{22} = a_{33} = 1$.

Um tensor de ordem 2 será um objeto que se transforma como

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

e um tensor de ordem n um objeto que se transforma como

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{k_1} \ldots \sum_{k_n} a_{i_1 k_1} \ldots a_{i_n k_n} T_{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

Convenção de Einstein: soma implícita para índices repetidos, por exemplo,

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \, \vec{e}_i = A_i \, \vec{e}_i$$

A partir de agora usaremos essa convenção.

2 Delta de Kronecker:

O tensor Delta de Kronecker é o tensor cartesiano δ_{ij} tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Contração: é uma operação que reduz a ordem de um tensor usando δ_{ij}. Ex: $T_{ijk}\delta_{jk} = T_{ijj} = T_i$. O produto escalar entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é uma contração pois $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i = A_i B_j \delta_{ij}$ é um número (sem índice, todos os índices foram somados), é o resultado de uma contração de um tensor de segunda ordem, $A_i B_j$.

3 Tensor de Levi-Civita:

O tensor de Levi-Civita é o tensor cartesiano ϵ_{ijk} tal que

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{permutações pares} \\ -1 & \text{permutações ímpares} \\ 0 & \text{repetição de índice} \end{cases}$$

Logo $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, mas $\epsilon_{112} = 0$ e $\epsilon_{213} = -1$. Esse tensor tem a propriedade

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Usando o tensor de Levi-Civita podemos escrever as componentes do produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$ como

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk}\,A_j\,B_k$$

Use isso para mostrar que:

1. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$
2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
3. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\,\vec{A}$