

Capítulo 2

Magnetostática

Conteúdo

2.1	Forma local da Lei de Ampère	20
2.2	Potencial Vetor \vec{A}	21
2.3	Potencial Vetor de correntes conhecidas	22
2.4	Exemplos	23
2.4.1	Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I	23
2.4.2	Potencial vetor de um circuito	24
2.5	Lei de Biot-Savart	25
2.5.1	Campo de um fio retilíneo carregando corrente	26
2.5.2	Campo de uma espira circular no eixo	27
2.6	Força magnética entre correntes	28

2.1 Forma local da Lei de Ampère

Podemos agora escrever a forma local da lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS .$$

Usando o teorema de Stokes,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS ,$$

que vale qualquer que seja o caminho fechado C e qualquer superfície S . Logo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) , \tag{2.1}$$

que é a forma local da lei de Ampère e uma das duas equações de Maxwell para a magnetostática.

2.2 Potencial Vetor \vec{A}

Lembremos que $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ em coordenadas cartesianas escreve-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Por outro lado, para um campo vetorial \vec{F} bem comportado já vimos que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv 0,$$

e que existe um teorema que garante que se $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, então existe \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Definimos o potencial vetor \vec{A} como

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

Assim como ocorre com o potencial escalar, há ambigüidade na definição de \vec{A} , pois $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = 0$

$$\implies \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

Podemos reduzir a ambigüidade, mas não removê-la completamente, definindo, por exemplo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Essa liberdade denomina-se liberdade de *gauge* ou de calibre. Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \psi$, a escolha de ψ permite obter qualquer valor para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$. Uma escolha conveniente para a magnetostática é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

o que corresponde ao chamado calibre ou gauge do Coulomb.

Vejamos qual o potencial \vec{A} para um campo uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{k}$:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \quad (2.5)$$

algumas soluções possíveis, todas com $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, são:

$$A_x = 0, \quad A_y = B_0 x, \quad A_z = 0 \quad (2.6)$$

$$A_x = -B_0 y, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0 \quad (2.7)$$

$$A_x = -\frac{1}{2}B_0 y, \quad A_y = \frac{1}{2}B_0 x, \quad A_z = 0 \quad (2.8)$$

Vemos que \vec{A} não é único! Normalmente é mais fácil achar \vec{A} e, a partir disso, obter \vec{B} .

2.3 Potencial Vetor de correntes conhecidas

As fontes de \vec{B} são correntes, logo as fontes de \vec{A} também são correntes. Como podemos achar \vec{A} conhecendo a distribuição de corrente?

A lei de Ampère, na sua forma local, permite escrever

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.9)$$

que, como veremos, é uma equação análoga a $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\rho/\epsilon_0$. Essa analogia ficará clara se reescrevermos $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ usando a identidade vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

obtendo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A},$$

onde lembramos que adotamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Podemos agora escrever $\nabla^2 \vec{A}$ explicitamente:

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{i} + (\nabla^2 A_y)\vec{j} + (\nabla^2 A_z)\vec{k},$$

o que, aplicado à equação Eq.(2.9), leva a três equações

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \quad (2.12)$$

semelhantes à equação de Poisson: $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Logo, tudo que aprendemos para $V(\vec{r})$ quando conhecemos $\rho(\vec{r})$ vale para cada componente de \vec{A} quando conhecemos \vec{j} . Mesma matemática, mesma física.

Vimos na eletrostática que uma solução geral para o potencial $V(\vec{r})$, num ponto P do espaço localizado por \vec{r} , assumindo $V(\infty) = 0$, é dada por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.13)$$

em que \vec{r}' é o vetor que localiza um elemento de volume com carga $dq = \rho(\vec{r}') dV'$, a uma distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ do ponto P . Assim, analogamente a solução geral para $A_x(\vec{r})$ é

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.14)$$

e similarmente para A_y e A_z . Combinando os resultados temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.15)$$

Observamos que essa igualdade só é válida em coordenadas cartesianas, não se obtém A_r usando j_r , por exemplo.

2.4 Exemplos

2.4.1 Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I

A corrente I se distribui uniformemente sobre a seção do fio; logo para $\eta = \sqrt{(x^2 + y^2)} < a$, $j = \text{constante}$, tem-se

$$\vec{j} = j_z \vec{k} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{k},$$

Como $j_x = j_y = 0 \implies A_x = A_y = 0$.

Podemos obter A_z a partir da solução para o potencial eletrostático de um fio com densidade de carga uniforme. Para pontos fora do fio,

$$V(\eta) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \eta + \text{const.}, \quad \lambda = q/L \equiv \pi a^2 \rho,$$

Logo, fazendo a substituição: $V \rightarrow A_z$ e $\rho/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0 j_z$ obtemos

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z \mu_0}{2\pi} \ln \eta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \eta.$$

Agora podemos calcular \vec{B} :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \ln \eta,$$

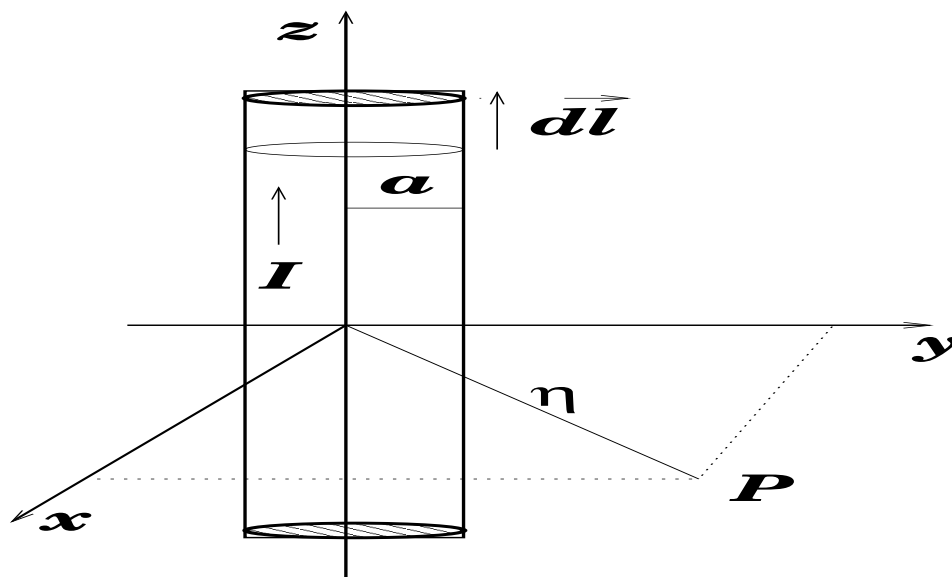


Figura 2.1: Fio retilíneo de raio a conduzindo corrente estacionária I .

e

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \eta ,$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \eta = \frac{x}{x^2 + y^2} , \quad \frac{\partial}{\partial y} \ln \eta = \frac{y}{x^2 + y^2} ,$$

logo

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{\eta^2} \tag{2.16}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{\eta^2} , \tag{2.17}$$

de forma que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \eta} \hat{\theta} ,$$

mais uma vez recuperando o resultado que já obtivemos antes para o campo de um fio infinito usando a lei de Ampère.

2.4.2 Potencial vetor de um circuito

Frequentemente nos interessamos em calcular \vec{B} para circuitos formados por fios cujos diâmetros são muito menores que suas dimensões. Para um fio fino, $dV = A dl$, em que A é a área da seção reta do fio, e dl , um elemento de comprimento. Se orientarmos $d\vec{l}$ ao

longo do fio, então $\vec{j} // d\vec{l}$. Como o fio é fino, podemos supor $j = \text{const.}$ sobre qualquer seção do fio. Logo,

$$\vec{j} dV = j A d\vec{l} = I d\vec{l}.$$

Assim, o potencial vetor de um circuito fechado é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.18)$$

2.5 Lei de Biot-Savart

Podemos agora calcular o campo magnético devido a uma distribuição de correntes usando

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right],$$

em que o operador ∇ (nabla) opera apenas nas variáveis x, y, z , não em x', y', z' . Para facilitar o cálculo usaremos a seguinte definição:

$$D(x, y, z) = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad \vec{D} = D \hat{D},$$

de forma que

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[j_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D} \right) - j_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D} \right) \right] dV'. \quad (2.19)$$

Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(x - x')}{D^3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(y - y')}{D^3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(z - z')}{D^3},$$

de forma que podemos reescrever Eq.(2.19) como

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\left[j_z(\vec{r}') \frac{(y - y')}{D^3} - j_y(\vec{r}') \frac{(z - z')}{D^3} \right]}_{-\left(\frac{\vec{j} \times \vec{D}}{D^3} \right)_x} dV' = -\left(\frac{\vec{j} \times \hat{D}}{D^2} \right)_x$$

Podemos calcular as componentes B_y e B_z de forma análoga, finalmente obtendo