

longo do fio, então  $\vec{j} // d\vec{l}$ . Como o fio é fino, podemos supor  $j = \text{const.}$  sobre qualquer seção do fio. Logo,

$$\vec{j} dV = j A d\vec{l} = I d\vec{l}.$$

Assim, o potencial vetor de um circuito fechado é

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.18)$$

## 2.5 Lei de Biot-Savart

Podemos agora calcular o campo magnético devido a uma distribuição de correntes usando

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right],$$

em que o operador  $\nabla$  (nabla) opera apenas nas variáveis  $x, y, z$ , não em  $x', y', z'$ . Para facilitar o cálculo usaremos a seguinte definição:

$$D(x, y, z) = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad \vec{D} = D \hat{D},$$

de forma que

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ j_z(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{D} \right) - j_y(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{D} \right) \right] dV'. \quad (2.19)$$

Observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{D} \right) = -\frac{(x - x')}{D^3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{D} \right) = -\frac{(y - y')}{D^3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{D} \right) = -\frac{(z - z')}{D^3},$$

de forma que podemos reescrever Eq.(2.19) como

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\left[ j_z(\vec{r}') \frac{(y - y')}{D^3} - j_y(\vec{r}') \frac{(z - z')}{D^3} \right]}_{-\left( \frac{\vec{j} \times \vec{D}}{D^3} \right)_x} dV' = -\left( \frac{\vec{j} \times \hat{D}}{D^2} \right)_x$$

Podemos calcular as componentes  $B_y$  e  $B_z$  de forma análoga, finalmente obtendo

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{D}}{D^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (2.20)$$

Se as correntes existem apenas em circuitos de fios, então podemos fazer a substituição  $\vec{j} dV' \rightarrow I d\vec{l}'$ , o que nos permite obter a lei de Biot e Savart, que fornece o campo magnético produzido por uma distribuição de correntes estacionárias de intensidade  $I$  no circuito  $C$  sob a forma de uma integral de linha ao longo de  $C$ :

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.21)$$

★ **Demo** : bolas de bilhar em trilhos paralelos

★ **Demo** : bobina de Helmholtz

Frequentemente enuncia-se a lei de Biot e Savart decompondo  $C$  em *elementos de corrente*  $I d\vec{l}'$ , dizendo que o campo em  $P$  devido a um tal elemento é

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}.$$

No entanto, como uma corrente estacionária está sempre associada a um circuito fechado, não é possível justificar decompô-la em elementos de corrente, exceto como etapa auxiliar ao cálculo.

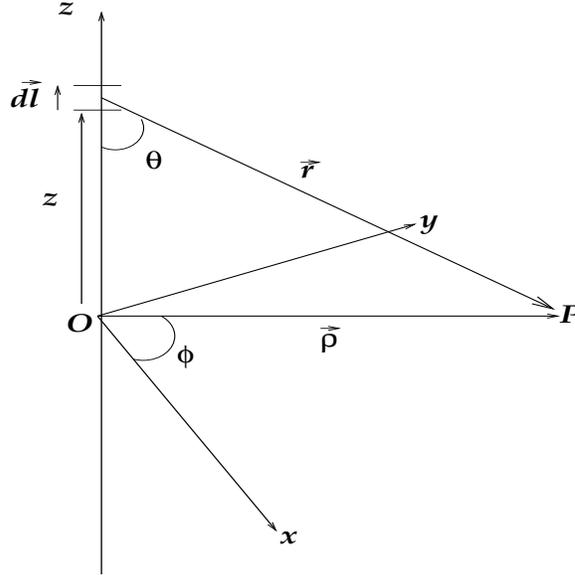
### 2.5.1 Campo de um fio retilíneo carregando corrente

Vamos agora calcular novamente o campo magnético produzido por um fio infinito (ou muito longo) carregando uma corrente estacionária  $I$ , usando a lei de Biot-Savart. Consideremos um ponto  $P$  localizado a uma distância  $\rho$  de um fio paralelo ao eixo  $z$  (figura 2.2). A distância entre o ponto  $P$  e um elemento de circuito  $d\vec{l}'$  a uma distância  $z$  da origem será designada por  $r$ . Podemos escrever que esse elemento produz o campo  $d\vec{B}$  em  $P$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \hat{r}}{r^2}.$$

Sabendo que  $d\vec{l}' = dz \vec{k}$ ,  $\vec{r} = \rho \hat{\rho} - z \vec{k}$ ,  $\hat{\rho} = \cos \phi \vec{i} + \text{sen} \phi \vec{j}$  e  $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ ,

$$d\vec{l}' \times \vec{r} = \rho dz \cos \phi \vec{j} - \rho dz \text{sen} \phi \vec{i} = \rho dz \hat{\phi}.$$


 Figura 2.2: Fio retilíneo infinito conduzindo corrente estacionária  $I$ .

Assim,  $\vec{B}(\rho) = B(\rho)\hat{\phi}$ , e o módulo do campo será

$$B(\rho) = \int dB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{\pi/2}^0 \text{sen } \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

em que resolvemos a integral fazendo a seguinte mudança de variável:  $z = \rho \cotg\theta \Rightarrow dz = -(\rho/\text{sen}^2\theta) d\theta$ , lembrando que há uma simetria em torno de  $z = 0$ , e que  $z = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$  e  $z = \infty \rightarrow \theta = 0$ .

### 2.5.2 Campo de uma espira circular no eixo

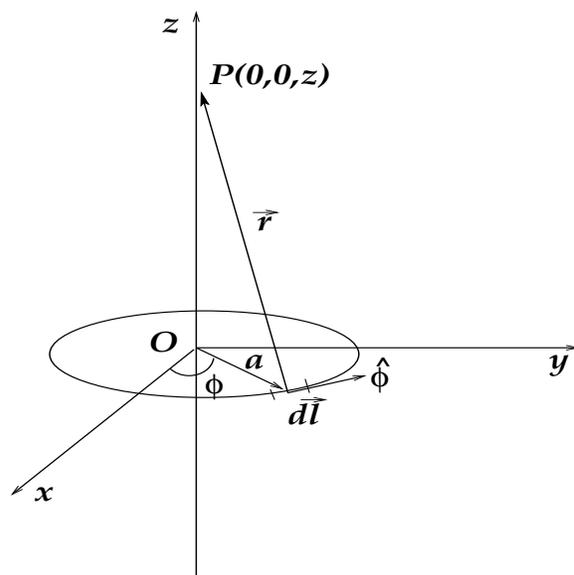
Consideremos uma espira circular de raio  $a$ , percorrida por uma corrente  $i$ . Queremos calcular  $\vec{B}$  num ponto  $P$  no eixo da espira. Podemos localizar  $P$  através do vetor  $\vec{z} = z\hat{k}$ , que pode ser escrito em termos dos vetores  $\vec{a} = a\hat{\rho}$  e  $\vec{r}$ , como  $\vec{z} = \vec{a} + \vec{r}$ , o que juntamente com o elemento de espira direcionado  $d\vec{l} = a d\phi \hat{\phi}$  permite escrever

$$d\vec{l} \times \vec{r} = a d\phi \hat{\phi} \times (z\hat{k} - a\hat{\rho}) = a z d\phi \hat{\rho} + a^2 d\phi \hat{k},$$

logo,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ \frac{a z d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\rho} + \frac{a^2 d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \right],$$

mas  $\hat{\rho} = \cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j}$ , logo

Figura 2.3: Espira circular de raio  $a$ .

$$\vec{B}(z) = \int d\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ \frac{a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \right] d\phi .$$

As duas primeiras integrais são claramente nulas, o que também poderia ser visto pela simetria do problema. O resultado então para o campo fica

$$\vec{B}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi \hat{k} = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} .$$

Esse resultado nos diz que no centro da espira o campo vale

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2a} \hat{k} ,$$

e para  $z \gg a$  teremos

$$\vec{B}(z) \approx \frac{\mu_0 i a^2}{2 z^3} \hat{k} = \frac{\mu_0 i}{2 \pi z^3} \vec{S} = \frac{\mu_0}{2 \pi z^3} \vec{m} ,$$

em termos do momento de dipolo magnético  $\vec{m}$ .

## 2.6 Força magnética entre correntes

Qual a força magnética entre dois fios retilíneos paralelos carregando correntes estacionárias  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente? Vamos supor que os dois fios estão a uma distância

$\rho$  um do outro, paralelos ao eixo  $z$ . O campo magnético que o primeiro fio produz na posição do segundo fio é

$$\vec{B}_1(\rho) = \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi \rho} \hat{\phi},$$

logo a força que o fio 1 exercerá no fio 2 carregando corrente  $I_2$  será

$$d\vec{F}_{2(1)} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi \rho} \hat{z} \times \hat{\phi} = -I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi \rho} \hat{\rho},$$

podemos então escrever

$$\frac{d\vec{F}_{2(1)}}{dl_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi \rho} \hat{\rho} = -\frac{d\vec{F}_{1(2)}}{dl_1},$$

que é a força por unidade de comprimento exercida pela corrente  $I_1$  sobre a corrente  $I_2$ .

Observamos que essa força é linearmente proporcional as correntes dos fios e inversamente proporcional à distância entre eles e que fios com correntes paralelas se atraem e com correntes anti-paralelas se repelem.